ВИЩА МАТЕМАТИКА

За редакцією доктора економічних наук,
професора В. С. Пономаренка

Харків
«Фоліо»
2014

ЗМІСТ

ВСТУП

За всіх часів математика мала велике практичне значення, а також відігравала важливу роль як у науковому, технічному, економічному розвитку суспільства, так і в розвитку окремої особистості. Ті, хто на високому рівні оволодівали математичними інструментами, завжди мали великий потенціал для реалізації своїх ідей і становили стратегічний ресурс нації.

Значним науковим досягненням стало впровадження математичних методів у економічну науку і в управління економічними процесами. Як відомо, наукове управління цими процесами здійснюється тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання — від оптимізації використання корисних копалин до вивчення пропозиції та попиту на товари широкого вжитку, від складання оптимальних планів виробництва до планування транспортних перевезень, розміщення транспортних артерій тощо.

Сьогодні, в умовах зростання ролі аналітичних досліджень соціально-економічних процесів майбутнім економістам, програмістам, менеджерам, інженерам потрібна глибока математична підготовка, яка б давала змогу застосовувати математичні інструменти для дослідження широкого кола проблем у своїй діяльності, користуватись сучасним програмним забезпеченням комп'ютерної техніки.

Оцінка ролі людини, яку вона відіграє в розвитку суспільства, обумовлює вирішення загальної проблеми підвищення якості підготовки майбутнього фахівця.

Широке впровадження нових інформаційних технологій, комп'ютеризація процесів діяльності людини залишають у минулому просту передачу знань від викладача до студента. Впроваджується концептуально новий підхід до процесу навчання студента, спрямований на кінцевий результат — формування компетентністного фахівця, який не тільки здобув певні знання, але й здатен ефективно їх використовувати в соціальній практиці та професійній діяльності. Формування майбутніх фахівців вимагає перегляду як методів та методик викладання дисциплін, так і всього навчально-методичного забезпечення. Важливо, щоб зміст викладеного матеріалу в підручнику, який є основним за дисципліною, міг формувати окремі компетентності, що інтегруються в єдину фахову компетентність.

Якщо за роки навчання у вищому навчальному закладі студент отримає чітке уявлення про прикладні можливості математики, зрозуміє, у чому полягає математичний підхід до вивчення реального світу, як його слід реалізовувати і яких результатів можна досягти, він намагатиметься набути міцних знань і необхідної математичної культури, розвине в собі вміння і можливість самостійно підвищувати рівень своєї освіти, і тоді в професійній діяльності він зможе легко адаптуватись до мінливого соціально-економічного середовища, буде конкурентоспроможним на ринку праці як в Україні, так і за її межами.

Фундаментальною основою математичної підготовки економістів є навчальна дисципліна «Вища математика», яка є нормативною дисципліною природничо-наукового циклу та складовою структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів з усіх економічних спеціальностей.

Основне завдання вивчення цієї навчальної дисципліни — надати студентам знання з основних розділів вищої математики, підвищити рівень їх фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін як математичного циклу, так і нематематичного. У процесі опанування навчальної дисципліни «Вища математика» студент отримує аналітично-дослідницькі компетенції, а саме знання, розуміння, вміння використовувати математичні інструменти, що їх надають лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальне числення, інтегральне числення, функції однієї та кількох змінних, диференціальні рівняння, ряди. Кожна тема в підручнику розпочинається з переліку окремих компетентностей, які в результаті вивчення даного матеріалу мають формувати майбутнього економіста.

Автори цього підручника мають багаторічний досвід викладання математики студентам економічних спеціальностей у різних вищих навчальних закладах України. Під час його написання автори керувалися дидактичним принципом у висвітленні матеріалу з кожної теми і побудові самої структури навчального посібника за темами, яка в цілому відповідає вимогам програми з вищої математики для економістів.

У розділах підручника наведена достатня кількість докладно розв'язаних типових задач різного ступеня складності. У кінці кожного розділу містяться питання для самоперевірки, а також достатня кількість задач для самостійного розв'язування з відповідями до них, наведено предметний покажчик.

У підручнику поєднується теоретичний матеріал з великою кількістю прикладів, у яких цей матеріал застосовується. Пропонуються методичні рекомендації розв'язання багатьох типових реальних економічних задач та вправи для самостійної роботи.

У кожному розділі підручника теоретичний та практичний матеріали подаються у повному обсязі, необхідному для засвоювання дисципліни «Вища математика» та подальшого її використання при вивченні спеціальних предметів, а також при розв'язанні задач економічної спрямованості.

Слід зазначити, що сучасні навчальні плани вивчення вищої математики пропонують кількість годин, половина яких відведена для самостійного засвоювання дисципліни. З метою допомоги студентам самостійно оволодіти теоретичними основами дисципліни та методами розв'язання задач автори підручника пропонують основи навчально-методичного комплексу дисципліни.

Підручник розрахований для студентів та викладачів економічних спеціальностей, а також може бути використаний як довідник спеціалістами у різних галузях економіки для вирішення реальних задач, де потрібно застосувати інструменти вищої математики.

Розділ 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Лінійна алгебра як самостійна математична дисципліна почала формуватися в XVIII столітті, коли в роботах німецького математика Г. Ф. Лейбніца та швейцарського математика Г. Крамера вперше було введено поняття визначника (детермінанта) і наведено загальні формули для визначення розв'язку систем лінійних рівнянь. Пізніше англійськими математиками А. Келі і Дж. Сільвестром було введено поняття матриці та закладені основи матричного числення, що є апаратом для компактного запису та аналізу систем рівнянь. Саме ці поняття лінійної алгебри широко використовують у прикладних задачах економіки. Так, для характеристики параметрів виробничих або бізнес-процесів вихідні дані надаються у вигляді матриці розміру $m \times n$.

Методи лінійної алгебри також застосовуються для обґрунтування управлінських рішень, при обробці результатів спостережень тощо. Наприклад, розв'язування задач оптимізації планів роботи підприємства, вивчення попиту, планування транспортних артерій можна звести до розв'язку систем m лінійних рівнянь з n невідомими.

Після вивчення даної теми ви зможете:

- використовувати числові матриці для формування й аналізу таблиць вихідних даних в економіці;
- використовувати системи лінійних рівнянь при розробленні лінійних економіко-математичних моделей;
- застосовувати поняття лінійних векторних просторів з метою геометричної інтерпретації економічних задач;
- мати уявлення про власні числа і власні вектори квадратних матриць в аналітичних задачах економіки;
- використовувати власні числа і власні вектори квадратних матриць при розробленні економіко-математичних моделей;
- застосовувати модель міжгалузевого балансу (багатогалузевої економіки) для вирішення реальних завдань економіки;
- будувати лінійну модель обміну (модель міжнародної торгівлі) при розв'язанні конкретних задач.

Глава 1

ЧИСЛОВІ МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

1.1. Задача про використання сировини. Математична модель

Розглянемо реальну задачу планування випуску промислової продукції на прикладі окремого підприємства, що виробляє електродвигуни як загального, так і спеціального призначення. Крім електродвигунів, завод виготовляє складні вироби побутового та сільськогосподарського призначення. Сформулюємо задачу про розподіл матеріальних ресурсів при виготовленні чотирьох основних видів продукції: електродвигунів АІР 80, АІР 90, АІР 100 та електричних насосів БЦ 1,1—20.

Основними факторами виробництва є сировина, напівфабрикати, що доставляються на підприємство, паливо та транспорт. Однак їх обсяги мають певні обмеження. Питомі витрати (витрати на виготовлення одиниці виробу кожного виду) та загальні обсяги наявних ресурсів (у відповідних одиницях) наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Питомі витрати матеріальних ресурсів та обсяги їх наявних запасів

Вид ресурсу	Витрати на одиницю продукції				Обсяг наявних ресурсів
	АІР 80	АІР 90	АІР 100	БЦ 1,1—20	
Сировина	176,00	236,7	279,9	144,5	17039
Напівфабрикати	11,45	15,22	12,91	34,63	1183
Паливо	6,00	7,00	7,00	6,50	513
Транспорт	3,75	5,04	5,86	3,58	365

Задача полягає в побудові такого плану виробництва основних видів продукції, який би забезпечив повне використання матеріальних ресурсів, що має в наявності підприємство.

Складемо ***математичну модель*** задачі, тобто опишемо поставлену задачу за допомогою математичної символіки. Введемо позначення величин, які є числовими характеристиками плану виробництва. Нехай x_1 — кількість електродвигунів АІР 80, яка відповідає повному використанню наявних ресурсів; x_2 — кількість електродвигунів АІР 90; x_3 — кількість електродвигунів АІР 100; x_4 — кількість електричних насосів БЦ 1,1—20. Згідно з умовою задачі та даними табл. 1.1 мають виконуватись такі рівності:

$$\begin{cases} 176x_1 + 236,7x_2 + 279,9x_3 + 144,5x_4 = 17039; \\ 11,45x_1 + 15,22x_2 + 12,91x_3 + 34,63x_4 = 1183; \\ 6,00x_1 + 7,00x_2 + 7,00x_3 + 6,50x_4 = 513; \\ 3,75x_1 + 5,04x_2 + 5,86x_3 + 3,58x_4 = 365. \end{cases}$$

Ми одержали систему лінійних рівнянь — рівнянь першого степеня відносно невідомих, — яка і є ***математичною моделлю*** задачі про повне використання матеріальних ресурсів. Такі системи відомі зі шкільного курсу математики, але методи їх розв'язання та, тим паче, дослідження для довільного скінченного числа рівнянь і невідомих у шкільному курсі не вивчаються (методи розв'язання цієї системи будуть наведені пізніше).

У загальному випадку задача про повне використання ресурсів формулюється так: нехай підприємство випускає продукцію n найменувань, для виробництва якої застосовуються m видів ресурсів. Потреби у ресурсах певного виду для виготовлення одиниці продукції кожного типу, загальна кількість ресурсів кожного виду подані у вигляді таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Задача про повне використання ресурсів

Види ресурсів	**Витрати ресурсів на виготовлення одиниці продукції**				**Обсяг ресурсів**
	1	**2**	**...**	***n***	
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m

Необхідно визначити кількість продукції кожного з найменувань, яку треба виробити підприємству, щоб наявні ресурси були повністю використані.

Складемо математичну модель задачі. Нехай $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ — кількості продукції відповідного найменування, яку виробляє підприємство. Тоді за даними таблиці 1.2 мають виконуватись рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Таким чином, знаходження розв'язку задачі про повне використання сировини зведено до розв'язування системи m лінійних рівнянь з n невідомими. Для дослідження і розв'язання таких систем застосовуються поняття матриць та визначників, які є основним математичним апаратом для вивчення систем лінійних рівнянь.

1.2. Означення матриць і деякі їх різновиди

Числовою матрицею розміру m на n $(m \times n)$ називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. Числа, що складають матрицю, називають її ***елементами.***

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C та іншими, а їх елементи — відповідними малими літерами з подвійними індексами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, де індекс i відповідає номеру рядка матриці ($i = \overline{1, m}$), а j — номеру її стовпця ($j = \overline{1, n}$). Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Кожний елемент a_{ij} матриці A знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця. При зображенні матриць множину елементів беруть у круглі (або у квадратні) дужки.

У загальному випадку елементами матриці можуть бути інші об'єкти: вектори, функції, їх похідні і т. ін.

У теоретичних дослідженнях при посиланні на матрицю певного розміру зазвичай застосовують позначення $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($m = n$) і дорівнює n, називається ***квадратною матрицею порядку n*** (або n-го порядку); у протилежному випадку ($m \neq n$) матрицю називають ***прямокутною***.

Матрицею-рядком називається матриця розміру $1 \times n$, тобто така, що складається з одного рядка.

Матрицею-стовпцем називається матриця розміру $m \times 1$, яка має один стовпець.

Якщо розглядається матриця-рядок (або матриця-стовпець), то для її елементів номер рядка (або, відповідно, номер стовпця) вказувати не треба.

Матриця може складатися навіть з одного елемента.

Нульовою матрицею називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю. Вона позначається літерою O.