

ВИЩА МАТЕМАТИКА

За редакцією доктора економічних наук,
професора В. С. Пономаренка

Харків
«Фоліо»
2014

ЗМІСТ

Вступ	13
Основні математичні позначення	16
Розділ 1	
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	21
Глава 1. Числові матриці та дії над ними	22
1.1. Задача про використання сировини. Математична модель	22
1.2. Означення матриць і деякі їх різновиди	24
1.3. Дії над матрицями	27
1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення	30
Ключові терміни	32
Запитання для самоперевірки	32
Глава 2. Визначники: означення та методи обчислювання	33
2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків	33
2.2. Властивості визначників	35
2.3. Обернена матриця	40
2.4. Розв'язання системи лінійних рівнянь за правилом Крамера	43
2.5. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці	44
Ключові терміни	46
Запитання для самоперевірки	46
Глава 3. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими: дослідження на сумісність та розв'язання	47
3.1. Ранг матриці: означення, способи знаходження	47
3.2. Дослідження систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера—Капеллі	49
3.3. Загальний та частинні розв'язки системи. Базисні та опорні розв'язки	53
3.4. Дослідження та розв'язання системи лінійних рівнянь методами Гаусса та Жордана—Гаусса	54
3.5. Лінійна балансова модель (модель Леонт'єва)	62
Ключові терміни	65
Запитання для самоперевірки	66

Глава 4. Лінійні (векторні) n-вимірні простори	67
4.1. Лінійні n -вимірні простори: основні означення	67
4.2. Лінійна залежність і незалежність векторів	71
4.3. Базис n -вимірного простору. Розкладання вектора за базисом	75
4.3.1. Перехід до нового базису. Знаходження базисних розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь	77
4.3.2. Однорідна система рівнянь. Особливості розв'язку	81
Ключові терміни	85
Запитання для самоперевірки	85
Глава 5. Лінійні перетворення. Власні вектори і власні числа лінійного оператора	87
5.1. Лінійні перетворення (лінійні оператори). Матриця лінійного перетворення \mathbf{R}^n	87
5.2. Власні вектори і власні числа лінійного оператора: означення, властивості	91
5.3. Знаходження власних чисел і власних векторів	95
5.4. Базис простору із власних векторів лінійного оператора	98
5.5. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)	101
Ключові терміни	104
Запитання для самоперевірки	104
Приклади та вправи до розділу 1	106
Задачі та вправи для самостійного розв'язання	115
Відповіді	120
Розділ 2	
ВЕКТОРНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ	121
Глава 6. Елементи векторної алгебри	122
6.1. Вектори: основні означення, лінійні операції	122
6.2. Прямокутна система координат у просторі. Координатна й алгебраїчна форми задання векторів	125
6.3. Скалярний, векторний, мішаний добуток векторів	128
6.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії	134
Ключові терміни	136
Запитання для самоперевірки	137
Глава 7. Пряма на площині	138
7.1. Поняття про рівняння лінії на площині. Основні задачі аналітичної геометрії	138
7.2. Різновиди рівнянь прямої на площині	139
7.3. Основні задачі про пряму лінію на площині	144
7.4. Використання рівняння прямої при розв'язанні економічних задач	151
Ключові терміни	153
Запитання для самоперевірки	153

Глава 8. Криві другого порядку	155
8.1. Загальне рівняння кривої другого порядку: типи кривих . . .	155
8.2. Канонічні рівняння кола та еліпса	155
8.3. Канонічне рівняння гіперболи. Асимптоти гіперболи	158
8.4. Парабола. Канонічне рівняння	161
8.5. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду	163
8.6. Квадратичні форми. Застосування до перетворення рівнянь кривої 2-го порядку	167
Ключові терміни	171
Запитання для самоперевірки	172
Глава 9. Площина у просторі	173
9.1. Поняття про рівняння поверхні	173
9.2. Різновиди рівнянь площини у просторі	173
9.3. Основні задачі про площину	178
Ключові терміни	182
Запитання для самоперевірки	182
Глава 10. Пряма у просторі. Взаємне розташування прямої і площини. Поверхні другого порядку	184
10.1. Різновиди рівнянь прямої	184
10.2. Основні задачі про пряму у просторі	186
10.3. Пряма і площина: аналіз взаємного розташування	192
10.4. Поняття про поверхні другого порядку	194
Ключові терміни	200
Запитання для самоперевірки	200
Приклади та вправи до розділу 2	202
Задачі та вправи для самостійного розв'язання	206
Відповіді	209
Розділ 3	
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ	211
Глава 11. Функціональна залежність. Класифікація функцій. Застосування функцій в економіці	212
11.1. Множини. Абсолютна величина дійсного числа	212
11.2. Функції: основні означення, способи задання	218
11.3. Класифікація функцій за їх властивостями	221
11.3.1. Монотонність функції	221
11.3.2. Обмеженість функції	222
11.3.3. Парність та непарність функції	222
11.3.4. Періодичність функції	223
11.3.5. Обернена функція	224
11.4. Класифікація функцій за діями над аргументом	225
11.5. Застосування елементарних функцій в економіці	226

Ключові терміни	228
Запитання для самоперевірки	228
Глава 12. Границя функції натурального аргументу	230
12.1. Числові послідовності: основні означення та арифметичні операції	230
12.2. Границя числової послідовності	231
12.3. Нескінченно малі послідовності: означення, властивості	233
12.4. Нескінченно великі послідовності: означення, властивості, зв'язок з нескінченно малими	236
12.5. Властивості границь числових послідовностей	238
Ключові терміни	241
Запитання для самоперевірки	241
Глава 13. Границя функції неперервного аргументу	243
13.1. Означення границі функції. Критерій існування	243
13.2. Поширення теорії границь послідовностей на функції	247
13.3. Різні типи невизначеностей та їх розкриття. Перша та друга чудові границі	248
13.4. Порівняння нескінченно малих. Застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь	257
Ключові терміни	258
Запитання для самоперевірки	259
Глава 14. Неперервність і розриви функцій	260
14.1. Означення неперервності функції у точці. Неперервність основних елементарних функцій	260
14.2. Розриви функцій та їх класифікація	264
14.3. Неперервність функції на проміжку. Основні теореми про неперервні функції	266
Ключові терміни	268
Запитання для самоперевірки	268
Приклади та вправи до розділу 3	269
Задачі та вправи для самостійного розв'язання	271
Відповіді	275
Розділ 4	
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	277
Глава 15. Похідна та її властивості, диференціювання функцій	278
15.1. Означення похідної, загальний порядок її знаходження, зв'язок похідної з неперервністю функції	278
15.2. Інтерпретація похідної у різних галузях знань	280

15.3. Таблиця похідних та правила диференціювання	282
15.4. Диференціювання складених функцій і функцій різної форми задання	284
15.5. Диференціал функції та його властивості	289
15.6. Застосування диференціала у наближених обчисленнях.	291
15.7. Похідні функції та її диференціали вищих порядків	292
15.8. Застосування похідних вищих порядків у наближених обчисленнях. Формула Тейлора для многочлена та довільної функції	295
Ключові терміни	299
Запитання для самоперевірки	299
Глава 16. Застосування похідних для дослідження функцій	301
16.1. Теореми диференціального числення	301
16.2. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя.	303
16.3. Дослідження функцій на монотонність.	305
16.4. Екстремум функції. Необхідна та достатні умови екстремуму.	308
16.5. Опуклість, угнутість та точки перегину кривої	313
16.6. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка	315
Ключові терміни.	318
Запитання для самоперевірки.	318
Глава 17. Застосування похідних в економічних дослідженнях	320
17.1. Задачі, у яких використовується поняття похідної	320
17.2. Граничний аналіз	321
17.3. Еластичність функції	322
17.4. Застосування похідної в економічній теорії	325
Ключові терміни	327
Запитання для самоперевірки.	328
Приклади та вправи до розділу 4	329
Задачі та вправи для самостійного розв'язання.	335
Відповіді	340
Розділ 5	
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	345
Глава 18. Функція багатьох змінних	346
18.1. Основні поняття. Область визначення функції	346
18.2. Границя та неперервність функції двох змінних	349
18.3. Прирости функції двох змінних	351
18.4. Частинні похідні	352
18.5. Частинні диференціали та повний диференціал. Використання у наближених обчисленнях	355
Ключові терміни.	359
Запитання для самоперевірки	360

Глава 19. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Локальний і умовний екстремуми	361
19.1. Похідна за напрямом	361
19.2. Градієнт функції та лінії рівня	362
19.3. Локальний екстремум функції двох змінних	364
19.4. Умовний екстремум	366
19.5. Найменше та найбільше значення функції на замкненій області	371
Ключові терміни	373
Запитання для самоперевірки	373
Глава 20. Застосування функцій кількох змінних у дослідженнях економічних процесів	374
20.1. Поняття про емпіричні формули і метод найменших квадратів	374
20.2. Загальні поняття про задачі математичного програмування	380
20.3. Еластичність функції кількох змінних	385
Ключові терміни	388
Запитання для самоперевірки	389
Приклади та вправи до розділу 5	390
Задачі та вправи для самостійного розв'язання	401
Відповіді	404
Розділ 6	
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА КІЛЬКОХ ЗМІННИХ	406
Глава 21. Первісна функція. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування	407
21.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла	407
21.2. Невизначений інтеграл. Означення, властивості, таблиця основних інтегралів	408
21.3. Безпосереднє інтегрування	412
21.4. Метод інтегрування заміною змінної	413
21.5. Метод інтегрування частинами	415
Ключові терміни	418
Запитання для самоперевірки	419
Глава 22. Інтегрування деяких класів елементарних функцій: раціональних, ірраціональних, тригонометричних	420
22.1. Інтегрування елементарних раціональних алгебраїчних дробів	420
22.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів	422
22.3. Інтегрування деяких видів ірраціональних функцій	426
22.4. Інтегрування функцій, що раціонально залежать від тригонометричних функцій	428

Ключові терміни	436
Запитання для самоперевірки	436
Глава 23. Визначений інтеграл. Теорема Ньютона—Лейбніца.	
Методи інтегрування	437
23.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла . . .	437
23.2. Основні властивості визначеного інтеграла	440
23.3. Зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами . . .	442
23.4. Формула Ньютона—Лейбніца	444
23.5. Методи обчислення визначеного інтеграла	445
Ключові терміни	448
Запитання для самоперевірки	448
Глава 24. Застосування визначеного інтеграла	
у деяких геометричних та економічних задачах	449
24.1. Довжина дуги плоскої кривої	449
24.2. Обчислення площі геометричної фігури	452
24.3. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами	
поперечних перерізів	457
24.4. Обчислення об'єму тіла обертання	458
24.5. Застосування інтегралів у деяких економічних задачах . .	459
24.6. Наближене обчислення визначених інтегралів	466
Ключові терміни	471
Запитання для самоперевірки	472
Глава 25. Невласні інтеграли. Інтеграл Ейлера—Пуассона	473
25.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування	
(невласні інтеграли I типу)	473
25.2. Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли	
II типу)	477
Ключові терміни	480
Запитання для самоперевірки	480
Глава 26. Подвійний інтеграл, його застосування	481
26.1. Подвійний інтеграл у декартових координатах.	
Означення, теорема існування	481
26.2. Геометричний смисл подвійного інтеграла	482
26.3. Властивості подвійного інтеграла	483
26.4. Обчислення подвійного інтеграла в декартових	
координатах	484
26.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах	488
26.6. Обчислення площі плоскої фігури за допомогою	
подвійного інтеграла	491
26.7. Обчислення об'єму тіла за допомогою подвійного	
інтеграла	492
Ключові терміни	494
Запитання для самоперевірки	494

Приклади та вправи до розділу 6	496
Задачі та вправи для самостійного розв'язання	501
Відповіді	505
Розділ 7	
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	509
Глава 27. Диференціальні рівняння першого порядку	510
27.1. Основні поняття та означення	510
27.2. Рівняння з відокремлюваними змінними	513
27.3. Однорідні диференціальні рівняння	515
27.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі	518
27.5. Рівняння у повних диференціалах	524
Ключові терміни	527
Запитання для самоперевірки	528
Глава 28. Диференціальні рівняння вищих порядків	529
28.1. Основні поняття та означення	529
28.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку	530
28.3. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами	534
28.4. Розв'язання однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	537
28.4.1. Однорідні лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами: $y'' + py' + qy = 0$	537
28.4.2. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$	540
Ключові терміни	541
Запитання для самоперевірки	542
Глава 29. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Системи лінійних диференціальних рівнянь	543
29.1. Структура розв'язку неоднорідних лінійних рівнянь	543
29.2. Розв'язання неоднорідних лінійних рівнянь зі спеціальними правими частинами	544
29.3. Розв'язання неоднорідних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих	548
29.4. Системи диференціальних рівнянь	550
Ключові терміни	555
Запитання для самоперевірки	556

Глава 30. Лінійні різницеві рівняння	557
30.1. Основні поняття та означення	557
30.2. Лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами	559
30.3. Однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами	560
30.4. Неоднорідні лінійні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною	564
30.5. Системи лінійних різницевих рівнянь	567
Ключові терміни	570
Запитання для самоперевірки	570
Глава 31. Використання диференціальних та різницевих рівнянь в економічних задачах	572
31.1. Відтворення загальних витрат виробництва за граничними характеристиками	572
31.2. Знаходження функцій витрат, попиту, ціни товару за їхньою еластичністю	573
31.3. Модель природного зростання	574
31.4. Модель природного зростання за умови насиченості ринку	576
31.5. Динаміка ринкових цін	578
31.6. Використання різницевих рівнянь в економіці	583
Ключові слова	586
Запитання для самоперевірки	586
Приклади та вправи до розділу 7	587
Задачі та вправи для самостійного розв'язання	595
Відповіді	598
Розділ 8	
РЯДИ	601
Глава 32. Основні поняття та означення. Необхідна ознака збіжності ряду	602
32.1. Числовий ряд та його збіжність	602
32.2. Ряд геометричної прогресії	604
32.3. Гармонійний ряд	605
32.4. Властивості збіжних рядів	606
32.5. Необхідна ознака збіжності ряду	608
Ключові терміни	610
Запитання для самоперевірки	610
Глава 33. Достатні умови збіжності числових рядів	611
33.1. Ознака порівняння рядів з додатними членами	611
33.2. Ознака Даламбера	613
33.3. Радикальна ознака Коші	616
33.4. Інтегральна ознака Коші	616

33.5. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду	618
33.6. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду.	619
Ключові терміни	621
Запитання для самоперевірки	621
Глава 34. Степеневий ряд та його збіжність. Ряди Тейлора і Маклорена	623
34.1. Функціональні ряди. Степеневий ряд	623
34.2. Область і радіус збіжності.	624
34.3. Властивості степеневих рядів	628
34.4. Степеневі ряди Тейлора та Маклорена	630
Ключові терміни.	632
Запитання для самоперевірки	633
Глава 35. Розкладання у ряд основних елементарних функцій. Використання рядів для наближених обчислень. Ряди Фур'є	634
35.1. Розкладання у ряд Маклорена основних елементарних функцій	634
35.2. Використання рядів у наближених обчисленнях	640
35.2.1. Обчислення за допомогою знакопереміжних рядів	640
35.2.2. Обчислення за допомогою знакододатних рядів	642
35.2.3. Обчислення визначених інтегралів	643
35.2.4. Використання рядів при розв'язуванні диференціальних рівнянь	645
35.3. Ряди Фур'є.	647
35.3.1. Тригонометричні ряди	647
35.3.2. Тригонометричні ряди Фур'є	648
35.3.3. Неповні ряди Фур'є	650
35.3.4. Ряд Фур'є для функції з довільним періодом	651
Ключові терміни	653
Запитання для самоперевірки	653
Приклади та вправи до розділу 8	655
Задачі та вправи для самостійного розв'язання	656
Відповіді	659
Використана література	661
Предметний покажчик	662

ВСТУП

За всіх часів математика мала велике практичне значення, а також відіграла важливу роль як у науковому, технічному, економічному розвитку суспільства, так і в розвитку окремої особистості. Ті, хто на високому рівні оволодівали математичними інструментами, завжди мали великий потенціал для реалізації своїх ідей і становили стратегічний ресурс нації.

Значним науковим досягненням стало впровадження математичних методів у економічну науку і в управління економічними процесами. Як відомо, наукове управління цими процесами здійснюється тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання — від оптимізації використання корисних копалин до вивчення пропозиції та попиту на товари широкого вжитку, від складання оптимальних планів виробництва до планування транспортних перевезень, розміщення транспортних артерій тощо.

Сьогодні, в умовах зростання ролі аналітичних досліджень соціально-економічних процесів майбутнім економістам, програмістам, менеджерам, інженерам потрібна глибока математична підготовка, яка б давала змогу застосовувати математичні інструменти для дослідження широкого кола проблем у своїй діяльності, користуватись сучасним програмним забезпеченням комп'ютерної техніки.

Оцінка ролі людини, яку вона відіграє в розвитку суспільства, обумовлює вирішення загальної проблеми підвищення якості підготовки майбутнього фахівця.

Широке впровадження нових інформаційних технологій, комп'ютеризація процесів діяльності людини залишають у минулому просту передачу знань від викладача до студента. Впроваджується концептуально новий підхід до процесу навчання студента, спрямований на кінцевий результат — формування компетентного фахівця, який не тільки здобув певні знання, але й здатен ефективно їх використовувати в соціальній практиці та професійній діяльності. Формування майбутніх фахівців вимагає перегляду як методів та методик викладання дисциплін, так і всього навчально-методичного забезпечення. Важливо, щоб зміст викладеного матеріалу в підручнику, який є основним за дисципліною, міг формувати окремі компетентності, що інтегруються в єдину фахову компетентність.

Якщо за роки навчання у вищому навчальному закладі студент отримує чітке уявлення про прикладні можливості математики, зрозуміє,

у чому полягає математичний підхід до вивчення реального світу, як його слід реалізувати і яких результатів можна досягти, він намагатиметься набути міцних знань і необхідної математичної культури, розвине в собі вміння і можливість самостійно підвищувати рівень своєї освіти, і тоді в професійній діяльності він зможе легко адаптуватись до мінливого соціально-економічного середовища, буде конкурентоспроможним на ринку праці як в Україні, так і за її межами.

Фундаментальною основою математичної підготовки економістів є навчальна дисципліна «Вища математика», яка є нормативною дисципліною природничо-наукового циклу та складовою структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів з усіх економічних спеціальностей.

Основне завдання вивчення цієї навчальної дисципліни — надати студентам знання з основних розділів вищої математики, підвищити рівень їх фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін як математичного циклу, так і нематематичного. У процесі опанування навчальної дисципліни «Вища математика» студент отримує аналітично-дослідницькі компетенції, а саме знання, розуміння, вміння використовувати математичні інструменти, що їх надають лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальне числення, інтегральне числення, функції однієї та кількох змінних, диференціальні рівняння, ряди. Кожна тема в підручнику розпочинається з переліку окремих компетентностей, які в результаті вивчення даного матеріалу мають формувати майбутнього економіста.

Автори цього підручника мають багаторічний досвід викладання математики студентам економічних спеціальностей у різних вищих навчальних закладах України. Під час його написання автори керувалися дидактичним принципом у висвітленні матеріалу з кожної теми і побудові самої структури навчального посібника за темами, яка в цілому відповідає вимогам програми з вищої математики для економістів.

У розділах підручника наведена достатня кількість докладно розв'язаних типових задач різного ступеня складності. У кінці кожного розділу містяться питання для самоперевірки, а також достатня кількість задач для самостійного розв'язування з відповідями до них, наведено предметний покажчик.

У підручнику поєднується теоретичний матеріал з великою кількістю прикладів, у яких цей матеріал застосовується. Пропонуються методичні рекомендації розв'язання багатьох типових реальних економічних задач та вправи для самостійної роботи.

У кожному розділі підручника теоретичний та практичний матеріали подаються у повному обсязі, необхідному для засвоювання дисципліни «Вища математика» та подальшого її використання при вивченні

Вступ

спеціальних предметів, а також при розв'язанні задач економічної спрямованості.

Слід зазначити, що сучасні навчальні плани вивчення вищої математики пропонують кількість годин, половина яких відведена для самостійного засвоювання дисципліни. З метою допомоги студентам самостійно оволодіти теоретичними основами дисципліни та методами розв'язання задач автори підручника пропонують основи навчально-методичного комплексу дисципліни.

Підручник розрахований для студентів та викладачів економічних спеціальностей, а також може бути використаний як довідник спеціалістами у різних галузях економіки для вирішення реальних задач, де потрібно застосувати інструменти вищої математики.

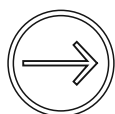
Розділ 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА



Лінійна алгебра як самостійна математична дисципліна почала формуватися в XVIII столітті, коли в роботах німецького математика Г. Ф. Лейбніца та швейцарського математика Г. Крамера вперше було введено поняття визначника (детермінанта) і наведено загальні формули для визначення розв'язку систем лінійних рівнянь. Пізніше англійськими математиками А. Келі і Дж. Сільвестром було введено поняття матриці та закладені основи матричного числення, що є апаратом для компактного запису та аналізу систем рівнянь. Саме ці поняття лінійної алгебри широко використовують у прикладних задачах економіки. Так, для характеристики параметрів виробничих або бізнес-процесів вихідні дані надаються у вигляді матриці розміру $m \times n$.

Методи лінійної алгебри також застосовуються для обґрунтування управлінських рішень, при обробці результатів спостережень тощо. Наприклад, розв'язування задач оптимізації планів роботи підприємства, вивчення попиту, планування транспортних артерій можна звести до розв'язку систем m лінійних рівнянь з n невідомими.



Після вивчення даної теми ви зможете:

- використовувати числові матриці для формування й аналізу таблиць вихідних даних в економіці;
- використовувати системи лінійних рівнянь при розробленні лінійних економіко-математичних моделей;
- застосовувати поняття лінійних векторних просторів з метою геометричної інтерпретації економічних задач;
- мати уявлення про власні числа і власні вектори квадратних матриць в аналітичних задачах економіки;
- використовувати власні числа і власні вектори квадратних матриць при розробленні економіко-математичних моделей;
- застосовувати модель міжгалузевого балансу (багатогалузевої економіки) для вирішення реальних завдань економіки;
- будувати лінійну модель обміну (модель міжнародної торгівлі) при розв'язанні конкретних задач.

Глава 1

ЧИСЛОВІ МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

1.1. Задача про використання сировини. Математична модель

Розглянемо реальну задачу планування випуску промислової продукції на прикладі окремого підприємства, що виробляє електродвигуни як загального, так і спеціального призначення. Крім електродвигунів, завод виготовляє складні вироби побутового та сільськогосподарського призначення. Сформулюємо задачу про розподіл матеріальних ресурсів при виготовленні чотирьох основних видів продукції: електродвигунів АІР 80, АІР 90, АІР 100 та електричних насосів БЦ 1,1—20.

Основними факторами виробництва є сировина, напівфабрикати, що доставляються на підприємство, паливо та транспорт. Однак їх обсяги мають певні обмеження. Питомі витрати (витрати на виготовлення одиниці виробу кожного виду) та загальні обсяги наявних ресурсів (у відповідних одиницях) наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Питомі витрати матеріальних ресурсів та обсяги їх наявних запасів

Вид ресурсу	Витрати на одиницю продукції				Обсяг наявних ресурсів
	АІР 80	АІР 90	АІР 100	БЦ 1,1—20	
Сировина	176,00	236,7	279,9	144,5	17039
Напівфабрикати	11,45	15,22	12,91	34,63	1183
Паливо	6,00	7,00	7,00	6,50	513
Транспорт	3,75	5,04	5,86	3,58	365

Задача полягає в побудові такого плану виробництва основних видів продукції, який би забезпечив повне використання матеріальних ресурсів, що має в наявності підприємство.

Складемо *математичну модель* задачі, тобто опишемо поставлену задачу за допомогою математичної символіки. Введемо позначення величин, які є числовими характеристиками плану виробництва. Нехай x_1 — кількість електродвигунів АІР 80, яка відповідає повному використанню наявних ресурсів; x_2 — кількість електродвигунів АІР 90; x_3 — кількість електродвигунів АІР 100; x_4 — кількість електричних

насосів БЦ 1,1—20. Згідно з умовою задачі та даними табл. 1.1 мають виконуватись такі рівності:

$$\begin{cases} 176x_1 + 236,7x_2 + 279,9x_3 + 144,5x_4 = 17039; \\ 11,45x_1 + 15,22x_2 + 12,91x_3 + 34,63x_4 = 1183; \\ 6,00x_1 + 7,00x_2 + 7,00x_3 + 6,50x_4 = 513; \\ 3,75x_1 + 5,04x_2 + 5,86x_3 + 3,58x_4 = 365. \end{cases}$$

Ми одержали систему лінійних рівнянь — рівнянь першого степеня відносно невідомих, — яка і є *математичною моделлю* задачі про повне використання матеріальних ресурсів. Такі системи відомі зі шкільного курсу математики, але методи їх розв’язання та, тим паче, дослідження для довільного скінченного числа рівнянь і невідомих у шкільному курсі не вивчаються (методи розв’язання цієї системи будуть наведені пізніше).

У загальному випадку задача про повне використання ресурсів формулюється так: нехай підприємство випускає продукцію n найменувань, для виробництва якої застосовуються m видів ресурсів. Потреби у ресурсах певного виду для виготовлення одиниці продукції кожного типу, загальна кількість ресурсів кожного виду подані у вигляді таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Задача про повне використання ресурсів

Види ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення одиниці продукції				Обсяг ресурсів
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Необхідно визначити кількість продукції кожного з найменувань, яку треба виробити підприємству, щоб наявні ресурси були повністю використані.

Складемо математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, \dots, x_n — кількості продукції відповідного найменування, яку виробляє підприємство. Тоді за даними таблиці 1.2 мають виконуватись рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Таким чином, знаходження розв'язку задачі про повне використання сировини зведено до розв'язування системи m лінійних рівнянь з n невідомими. Для дослідження і розв'язання таких систем застосовуються поняття матриць та визначників, які є основним математичним апаратом для вивчення систем лінійних рівнянь.

1.2. Означення матриць і деякі їх різновиди

Числовою матрицею розміру m на n ($m \times n$) називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. Числа, що складають матрицю, називають її **елементами**.

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C та іншими, а їх елементи — відповідними малими літерами з подвійними індексами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} , де індекс i відповідає номеру рядка матриці ($i = \overline{1, m}$), а j — номеру її стовпця ($j = \overline{1, n}$). Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Кожний елемент a_{ij} матриці A знаходиться на перетині i -го рядка та j -го стовпця. При зображенні матриць множину елементів беруть у круглі (або у квадратні) дужки.

У загальному випадку елементами матриці можуть бути інші об'єкти: вектори, функції, їх похідні і т. ін.

У теоретичних дослідженнях при посиланні на матрицю певного розміру зазвичай застосовують позначення $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($m = n$) і дорівнює n , називається **квадратною матрицею порядку n** (або n -го порядку); у протилежному випадку ($m \neq n$) матрицю називають **прямокутною**.

Матрицею-рядком називається матриця розміру $1 \times n$, тобто така, що складається з одного рядка.

Матрицею-стовпцем називається матриця розміру $m \times 1$, яка має один стовпець.

Якщо розглядається матриця-рядок (або матриця-стовпець), то для її елементів номер рядка (або, відповідно, номер стовпця) вказувати не треба.

Матриця може складатися навіть з одного елемента.

Нульовою матрицею називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю. Вона позначається літерою O .